Matemáticas

Temática

Algebra

RED

Libro Educativo Multimedial

Autor: **Diego Fernando Becerra Ramirez**
Revisado: **No Aplica**

Bucaramanga, Colombia

2020

Resumen

Este documento se ha creado con fines solamente educativo y esta dirigido a todos los estudiantes de el grado octavo en adelante. La temática de este documento, el cual no sera impreso ni distribuido de forma física es sobre algebra y los casos de factorización.

El algebra es un área de conocimiento de mucha importancia y la cual esta dejando grandes vacios en el proceso de formación secundaria, lo cual está ocasionando en los procesos de educación universitaria serias dificultades en los estudiantes de ingenierías y áreas afines. Por esta razón se tomo como muestra una pequeña población de estudiantes en edades de los 13 a los 16 años y se realizo un tamizaje sobre el estilo de aprendizaje de ellos y en base a los resultados se diseño la estructura y contenido del libro, en el cual además del contenido, tambien se encuentran enlaces a video tutoriales y demás.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Capítulo 1

Introducción

Doblando Ideas, Plegando Sueños.

@DIEGORIGAMI

Este libro esta enfocado a los casos de factorización sin pretender abarcar toda la temática de algebra y está en proceso de escritura. Se publica está primera parte por la necesidad educativa especial, la cual está viviendo en el mundo a causa de la pandemia generada por el COVID-19 que ha obligado a miles de escuelas en el mundo a cerrar sus aulas. El quehacer docente no puede detenerse ya que tenemos una responsabilidad con los procesos de educación y formación de los niños.

El contenido del libro se ha desarrollado de una manera atractiva al estudiante y no pretende ser un libro impreso, sino por el contrario ser un libro completamente digital gratuito y en futuras actualizaciones tendrá enlaces a videotutoriales, animaciones y demás.

Capítulo 2

Lenguaje Algebraico

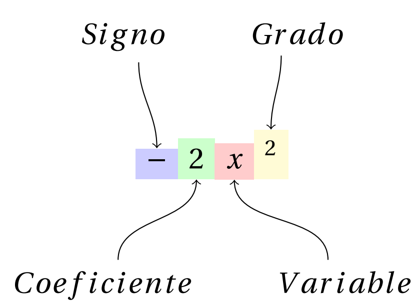
2.1. Nomenclatura algebraica

Definición 1 (Término) *Es una expresión algebraica que consta de uno varios símbolos* los cuales no están separados entre sí el signo + o -.

Ejemplo 1 *Las siguientes expresiones son términos:*

- x
- $5y$
- $3mn$
- $\dfrac{4z}{3y}$
- $-4xy^2$
- $-13x^2y^3z^2$
- $-3x^2y^3$
- $7b$

Los elementos de un término *son cuatro: el signo, el coeficiente, la parte variable y el grado.*



Definición 2 (Grado de un término con relación a una variable) *Dado un término con mas de una variable, el grado de dicho término está determinado por el grado de cada variable.*

Ejemplo 2 *Dado el término $-5x^4y^2z$, se tiene que el término es de cuarto grado con respecto a x, segundo grado con respecto a y y de primer grado con respecto a z.*

Ejercicio 1 *Completar la siguiente tabla*

Término	Coeficiente	Variables	Grado (s)	Signo
$\frac{1}{2}xy$				
$-\frac{3}{4}x^3y^2z$				
	$\frac{4}{5}$		$r,s \to 2,\ t \to 3$	$+$

2.2. Clasificación de las expresiones algebraicas

Definición 3 (Monomio) *Un monomio es una expresión algebraica que está formada por un sólo término.*

Ejemplo 3 *Las siguientes expresiones algebraicas son monomios.*

- $-3x$
- $5xy$
- $-13x^2y^3z^2$

Definición 4 (Binomio) *Un binomio es una expresión algebraica que está formada por dos términos.*

Ejemplo 4 *Las siguientes expresiones algebraicas son binomios.*

- $-3x-4y$
- $5xy+3y^2$
- $-13x^2y^3+5z^2$

Definición 5 (Trinomio) *Un Trinomio es una expresión algebraica que está formada por tres términos.*

Ejemplo 5 *Las siguientes expresiones algebraicas son trinomios.*

- $x^2-3x-4y$
- $x^2-5xy+3y^2$
- $-13x^2y^3+5x-3y^4$

Definición 6 (Polinomio) *Un Polinomio es una expresión algebraica que está formada por mas de tres términos.*

Ejemplo 6 *Las siguientes expresiones algebraicas son trinomios.*

- $x^3+3^2y+3xy^2+y^3$
- $3x^5y^3-5x^4y+3x-6xy^5$
- $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+......+a_2x^2+a_1x^1+a_0$

Ejercicio 2 *Realizar los siguientes puntos según las indicaciones dadas.*

a) Completar en la línea indicando si el polinomio dado es un monomio, binomio, trinomio o polinomio.

- $x^4-6x^3 \dashrightarrow$ ____________________
- $a^3-a^2b+3ab^2+b^3 \dashrightarrow$ ____________________
- $\frac{1}{2}x^2y \dashrightarrow$ ____________________
- $x^2+5x-6 \dashrightarrow$ ____________________
- $Polinomio \dashrightarrow$ ____________________
- $Monomio \dashrightarrow$ ____________________
- $Trinomio \dashrightarrow$ ____________________
- $Binomio \dashrightarrow$ ____________________

b) Relacionar mediante una flecha los elementos de la columna izquierda con los de la derecha

• x^3-y^3	• $Monomio$
• $-5y^a$	• $Binomio$
• $4x^2-3xy+2y^2-1$	• $Trinomio$
• x^2-x-6	• $Polinomio$

Definición 7 (Grado de un Polinomio con respecto a una variable:) *El grado de un polinomio con respecto a una variable es el exponente mayor (mas grande) de dicha variable en el polinomio. En el caso del polinomio* $x^3+3x^2y+xy^2$*, se puede afirmar que es de grado 3 con respecto a la variable* x *y de grado 2 con respecto a la variable* y

Ejemplo 7 *Las siguientes expresiones algebraicas son trinomios. Los grados de los siguientes polinomios respecto a las variables son:*

- $x^3-y^3 \dashrightarrow$ *Grado 3 con respecto a* x *y grado 3 con respecto a* y
- $4x^2-3xy+2y^2-1 \dashrightarrow$ *Grado 2 con respecto a* x *y grado 2 con respecto a* y
- $x^2-x-6 \dashrightarrow$ *Grado 2 con respecto a* x *y grado 1 con respecto a* y

Definición 8 (Término independiente) . *El término independiente es el término que no tiene parte variable en un polinomio, así en el polinomio* $x^4+5x^3-3x^2+7x+20$*, el término independiente en el polinomio es* 20.

Capítulo 3

Operaciones entre polinomios

3.1. Suma y Resta

Definición 9 (Términos semejantes) *Dos o mas términos son semejantes cuando tienen la misma parte literal, es decir, cuando tienen letras iguales afectadas por exponentes iguales.*

Ejemplo 8 *los siguientes son términos semejantes:*

- $3x^3 \quad y \quad -5x^3$
- $\frac{1}{3}a^4 \quad y \quad 4a^4$
- $b^{x+1} \quad y \quad 3b^{x+1}$

Definición 10 (Redución de términos semejantes) *Es una operación que tiene como fin convertir en un solo término dos o mas términos semejantes.*

Regla 1 *Para realizar la redución de términos semejantes se deben sumar algebraicamente los coeficientes y a continuación se escriben las variables o la parte literal.*

Ejemplo 9 *Reducir los siguientes polinomios realizando la operación entre términos semejantes*

a) $3a+2a$

b) $-\frac{1}{2}x^2y+2x^2y=\frac{3}{2}x^2y$

c) $a^4-4ab+3a^4+6ab+20=4a^4+2ab+20$

Solución

a) $3a+2a$

$$3a+2a=$$
$$(3+2)a=$$
$$5a$$

b) $-\frac{1}{2}x^2y+2x^2y$

$$-\frac{1}{2}x^2y+2x^2y=$$
$$\left(-\frac{1}{2}+2\right)x^2y=$$
$$\frac{3}{2}x^2y$$

c) $a^4-4ab+3a^4+6ab+20=$

$$a^4-4ab+3a^4+6ab+20=$$
$$(1+3)a^4+(-4+6)ab+20=$$
$$4a^4+2ab+20$$

Ejercicio 3 *Reducir los términos semejantes de los siguientes polinomios*

1. $7a-9b+6a-4b.$
2. $a+b-c-b-c+2c-a.$
3. $5x-11y-9+20x-1-y.$
4. $-6m+8n+5-m-n-6m-11.$
5. $-1+b+2b-2c+3a+2c-3b.$
6. $-81x+19y-30z+6y+80x+x-25y.$
7. $15a^2-6ab-8a^2+20-5ab-31+a^2-ab.$
8. $-3a+4b-6a+81b-114b+31a-a-b.$
9. $-71a^3b-84a^4b^2+50a^3b+84a^4b^2-45a^3b+18a^3b.$
10. $-a+b-c+8+2a+2b-19-2c-3a-3-3b+3c.$
11. $a^{m+2}-x^{m+3}-5+8-3a^{m+2}+5x^{m+3}-6+a^{m+2}-5x^{m+3}.$
12. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b+2a-3b-\frac{3}{4}a-\frac{1}{6}b+\frac{3}{4}-\frac{1}{2}.$
13. $\frac{3}{25}a^{m-1}-\frac{7}{50}b^{m-1}\frac{3}{5}a^{m-1}-\frac{1}{25}b^{m-1}-0.2a^{m-1}+\frac{1}{5}b^{m-1}.$

3.1.1. Axiomas de los números reales

Igualdad

Dados los números a, b y $c \in \mathbb{R}$ se cumple que:

1. Identidad: $a = a$.
2. Reciprocidad: si $a = b$, entonces $b = a$.
3. Transitividad: si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Suma

1. Conmutatividad: $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
2. Asociatividad: $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.
3. Neutro: $\exists!\ 0 \in \mathbb{R}$, tal que $a + 0 = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.
4. Inverso: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists!\ -a \in \mathbb{R}$, tal que $a + (-a) = 0$.

3.2. Multiplicación de Polinomios

Antes de continuar con la multiplicación de polinomios, es importante recordar las propiedades de la potenciación

Propiedades de la potenciación

1 $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

2 $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

3 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

4 $a^0 = 1$

5 $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

6 $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

7 $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

8 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Para realizar la multiplicación de un polinomio por un polinomio, se debe tomar cada término del primer polinomio y multiplicarlo por cada término del segundo polinomio, es decir, aplicar la ley distributiva.

3.2.1. Multiplicación de un Monomio por otro monomio

Ejemplo 10 *Realizar la multiplicación de los siguientes monomios:*

$$-3xy^2 \qquad por \qquad 4x^3y^2$$

Para resolver la multiplicación de los monomios se deben seguir los siguientes pasos:

1 ⇝ *Se sigue la ley de los signos para la multiplicación.*

2 ⇝ *Se multiplican los coeficientes.*

3 ⇝ *Se multiplican las variables, teniendo en cuenta las propiedades de la multiplicación.*

4 ⇝ *Se ordenan alfabeticamente si es necesario.*

$$\left(-\ 3\ xy^2\right)\bullet\left(\ 4\ x^3y^2\right)$$

Paso 1 $\quad +\cdot - = -$

Paso 2 $\quad 3\cdot 4 = 12$

Paso 3 $\quad xy^2\cdot x^3y^2 \quad = x^{1+3}y^{2+2} = x^4y^4$

Paso 4 $\quad -12x^4y^4$

Entonces el resultado de $-3xy^2$ *por* $4x^3y^2$ *es igual a* $-12x^4y^4$

Ejemplo 11 *Realizar la multiplicación de los siguientes monomios:*

$$-6a^2b^3 \qquad por \qquad \frac{1}{3}a^3b^2$$

$$\left(-\ 6\ \ a^2b^3\right)\bullet\left(-\ \frac{1}{3}\ \ a^3b^2\right)$$

Entonces el resultado de $-6a^2b^3$ *por* $\frac{1}{3}a^3b^2$ *es igual a* $2a^5b^5$

3.2.2. Multiplicación de un Monomio por un Polionomio

Ejemplo 12 *Realizar la siguiente multiplicación:*

$$-6x^2 \qquad por \qquad \left(\frac{1}{3}x + 2xy - y^2\right)$$

Para realizar esta multiplicación se utiliza la ley distributiva y se realizan las multiplicaciones de los monomios por monomios.

$$-6x^2 \bullet \left(\frac{1}{3}x + 2xy - y^2\right)$$

$$\left(-6x^2\right) \bullet \left(\frac{1}{3}x + 2xy - y^2\right) = -2x^3 - 12x^3y + 6x^2y^2$$

3.2.3. Multiplicación de un Polinomio por un Polionomio

Ejemplo 13 *Realizar la siguiente multiplicación:*

$$(a + b) \qquad por \qquad (2a - ab + 3b)$$

Para realizar esta multiplicación se utiliza la ley distributiva con cada término del primer polinomio y se realizan las multiplicaciones de los monomios por monomios.

$$\left(a + b\right) \bullet \left(2a - ab + 3b\right)$$

$$\begin{aligned} (a+b) \bullet (2a - ab + 3b) &= 2a^2 - a^2b + 3ab + 2ab - ab^2 + 3b^2 \\ &= 2a^2 - a^2b + 5ab - ab^2 + 3b^2 \end{aligned}$$

3.3. Productos Notables

3.3.1. El cuadrado de la suma de dos cantidades $(a+b)^2$

El cuadrado de la suma de dos cantidades se puede realizar por medio de la multiplicación de un binomio por otro binomio, como se muestra a continuación.

$$(a+b)^2 = \left(a + b \right) \bullet \left(a + b \right) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

En este caso en particular se define la siguiente ecuación para encontrar el resultado, sin necesidad de realizar la operación entre los binomios.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{3.1}$$

Ejemplo 14 *Desarrollar* $(3x+4y^2)^2$

$$(3x+4y^2)^2 \quad = \quad (3x)^2 + 2(3x)(4y^2) + (4y^2)^2 \quad = \quad 9x^2 + 24xy^2 + 16y^4$$

3.3.2. El cuadrado de la diferencia de dos cantidades $(a-b)^2$

El cuadrado de la diferencia de dos cantidades se puede realizar por medio de la multiplicación de un binomio por otro binomio, como se muestra a continuación.

$$(a-b)^2 = \left(a - b \right) \bullet \left(a - b \right) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

En este caso en particular se define la siguiente ecuación para encontrar el resultado, sin necesidad de realizar la operación entre los binomios.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \tag{3.2}$$

Ejemplo 15 *Desarrollar* $(x^2-2y^3)^2$

$$(x^2-2y^3)^2 \quad = \quad (x^2)^2 - 2(x^2)(2y^3) + (2y^3)^2 \quad = \quad x^4 - 4x^2y^3 + 4y^6$$

3.3.3. Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades $(a+b)(a-b)$

Al igual que en el caso del cuadrado de la suma o de la diferencia de dos cantidades, este caso, el producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

$$(a+b)(a-b) = \left(a + b \right) \bullet \left(a - b \right) = a^2 + ab - ba + b^2 = a^2 - b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \tag{3.3}$$

3.4. Ejercicios

Ejercicio 4

Realizar la multiplicación de los siguientes polinomios:

a) $(3x+12)\bullet(4x-5y)$

b) $(3x^3)\bullet(12x^2+8x)$

c) $(a^x)\bullet(2a^{x+1}-3a^{2x})$

d) $(-3x^2y+2xy)\bullet(2y-5xy^2)$

e) $\left(-\frac{1}{2}x^2y\right)\bullet\left(-\frac{3}{5}xy^2\right)\left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$

f) $(2+a^2-2a-a^3)\bullet(a+1)$.

g) $(n^2-2n+1)\bullet(n^2-1)$

h) $(x^{a+2}y^{x-1}+3x^ay^{x+1})\bullet(-2x^{2a-1}y^{x-2}-10x^{2a-3}y^x)$

i) $(\frac{2}{5}m^2+\frac{1}{3}mn-1\frac{1}{2}n^2)\bullet(\frac{3}{2}m^2+2n^2-mn)$.

j) $3x\bullet(x+3)\bullet(x-2)\bullet(x+1)$

Capítulo 4

Casos de Factorización

4.1. Factor Común

Es el primer caso de factorización y se puede utilizar cuando todos los términos de un polinomio tienen un factor común. Se presentan dos casos principales según sea el factor común, un monomio o un polinomio.

4.1.1. Monomio como factor común

Ejemplo 16 *Realizar la descomposicion en factores el polinomio:* $x^3 + 3x$

x^3 *y* $3x$ *tienen como factor común a* x*, entonces se procede a quitar una x de cada término del polinomio y se escribe la expresión resultante como el pructo del polinomio por el factor común, como se muestra a continuación.*

$$x^3 + 3x = x(x^2 + 3)$$

Prueba 1 *Para realizar la prueba, se procede a realizar la multiplicación de un monomio por un polinomio y comprobar el resultado.*

$$\begin{aligned} x^3 + 3x &= x \cdot (x^2 + 3) \\ &= x \cdot x^2 + 3 \cdot x \\ &= x^{1+2} + 3 \cdot x \\ &= x^3 + 3x \end{aligned}$$

Cómo Reconocer

Se toma cada uno de los términos del polinomio y se busca un factor común en todos ellos. Los números de cada uno de estos términos se ùeden factorizar si no son coprimos, es decir, si existe un máximo común divisor entre ellos diferentes de 1.

Cómo Factorizar

Se tomas todas las letras comunes en todos los términos con el menor exponente, se halla el máximo común divisor (**MCD**). Se escribe el monomio, el cúal es el MCD y la letra con menor exponente, déspues se abre un aprentesis y se escriben los términos que resultan de dividir cada uno por el factor común.

Ejemplo 17 *Realizar la descomposicion en factores el polinomio:* $24xy - 18xz$

En este caso se tienen dos términos y la letra común y con menor exponente es x*, se procede a calcular el MCD entre (24 y 18)*

24	18	2
12	9	2
6	9	2
3	9	3
1	3	3
1	1	

Tabla 4.1: Calculo del MCD de 24 y 18

$$MCD = 2 \cdot 3 = 6$$

$24xy$ **y** $18xz$ *tienen como factor común a* $6x$*, entonces se procede a realizar la división de cada término por* $6x$ *y se escribe la expresión resultante como el pruducto del polinomio por el factor común, como se muestra a continuación.*

$$24xy - 18xz = 6x \cdot (4y - 3z)$$

Prueba 2 *Para realizar la prueba, se procede a realizar la multiplicación de un monomio por un polinomio y comprobar el resultado.*

$$\begin{aligned} 24xy - 18xz &= 6x \cdot (4y - 3z) \\ &= 6x \cdot 4y - 6x \cdot 3z \\ &= 24xy - 18xz \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Realizar la factorización de los siguientes polinomios

a) $3x+12$

b) $12x^2+8x$

c) $16z^3-4z$

d) $15x^3y^2+60x^2y^3$

e) a^2+ab

f) $t^3-8t^2+t.$

g) $x^4+x^3-x^2+x$

h) $15abc^2+45a^2bc$

i) $5x^2y^2-15xy+20xyz$

j) $2m^3n^3-8m^2n^2-4m^4n^4$

k) $17m^3n^3-51m^2n^2+85mn$

l) $x^5-x^4+x^3-x^2+x$

m) $93x^3y^2z-62x^2y^3z^2-124x^2y$

n) $x^3+x^5-x^7$

ñ) $2x^2y+2xy^2-3xy$

o) $xyz+xyz^2$

p) $a^6-3a^4+8a^3-4a^2$

4.1.2. Polinomio como factor común

Ejemplo 18 *Realizar la descomposicion en factores el polinomio:* $a(x+1)+b(x+1)$

$a(x+1)$ *y* $b(x+1)$ *tienen como factor común a* $x+1$*, entonces se procede dividir cada término por* $x+1$ *y se escribe la expresión resultante como el pruducto del polinomio por el factor común, como se muestra a continuación.*

$$a(x+1)+b(x+1)=(x+1)(a+b)$$

Prueba 3 *Para realizar la prueba, se procede a realizar la multiplicación de un del polinomio por cada uno de los términos del polinomio y comprobar el resultado.*

$$\begin{aligned} a(x+1)+b(x+1) &= (x+1)\cdot(a+b) \\ &= (x+1)\cdot a+(x+1)\cdot b \\ &= a(x+a)+b(x+1) \end{aligned}$$

Cómo Reconocer

El factor común es un polinomio que se encuentra entre parentesis.

Cómo Factorizar

Se toma el factor común (polinomio que se encuentra entre parentesis) y se divide cada término del polinomio entre el factor común.

Ejercicio 6

Realizar la factorización de los siguientes polinomios *a)* $2x(a+1)-3y(a+1)$

b) $3x(b-2)+2y(b-2)$

c) $a(x+2)-b(x+2)$

d) $x^2(x+y-1)+y^2(x+y-1)$

e) $4x(m-n)+n-m$

f) $y(x+1)-x-1.$

g) $x^2+2-y(x^2+2)$

h) $3x(x-1)-2y(x-1)+z(x-1)$

i) $(x+y+2)(x^3+3)-x^3-3$

j) $4m(a^2+x-1)+3n(x-1+a^2)$

k) $5x(y^2+1)+(x+1)(y^2+1)$

l) $(x-3)(x-4)+(x-3)(x+4)$

4.2. Factor común por agrupación de términos

En este caso de factorización, se deben reorganizar los términos y reagruparlos con el objetivo de realizar el factor común de cada uno de los grupos y posteriormente realizar la factorización (factor común), teniendo como factor un polinomio.

Ejemplo 19

Realizar la descomposicion en factores el polinomio: $ax+bx+ay+by$

Solución

Para resolver el ejercicio es necesario identificar en el polinomio cuales términos tienen un factor común, en este caso $ax+bx$ tienen como factor común a x y $ay+by$ tienen como factor común a y, entonces se sigue a realizar las respectivas factorizaciones de la siguiente forma

x(a+b) + y(a+b)

en este caso se puede observar facilmente el polinomio en común y es $a+b$ y se procede a realizar un polinomio como factor común

$$ax+bx+ay+by=(a+b)(x+y)$$

Ejemplo 20

Realizar la descomposicion en factores el polinomio: $ax-2bx-2ay+4by$

Solución

Para resolver el ejercicio es necesario identificar en el polinomio cuales términos tienen un factor común, en este caso $ax-2bx$ tienen como factor común a x y $-2ay+4by$ tienen como factor común a $-2y$, entonces se sigue a realizar las respectivas factorizaciones de la siguiente forma

x(a-2b) -2y(a-2b)

en este caso se puede observar facilmente el polinomio en común y es $a-2b$ y se procede a realizar un polinomio como factor común

$$ax-2bx-2ay+4by=(a-2b)(x-2y)$$

Se deja como ejercicio para el lector, realizar la prueba mediante la multiplicación de los dos binomios.

Ejercicio 7

Descomponer en dos factores los siguientes polinomios

a) $x^2+xy+2x+2y$

b) $ax-bx+ay-by$

c) y^3+y^2+y+1

d) $x^2-b^2+x-b^2x$

e) $3a^2-7b^2x+3ax-7ab^2$

f) $6ax+3a+1+2x.$

g) $4a^3x-4a^2b+3bm-3amx$

h) $a+a^2-ab^2-b^2$

i) $4y^3-1-y^2+4y$

j) $3ax-2by-2bx-6a+3ay+4b$